Concursul național studențesc de matematică „Traian Lalescu”
Universitatea *Lucian Blaga* din Sibiu
ediția a IX-a, 19-21 mai 2016

Subiecte - secţiunea B

1. a) Știind că $\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, să se calculeze integrala improprie

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(sin\frac{x}{n})^2}{x^2} dx$$

b) Să se determine suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} I_{f(n)}$, unde $f(n) = \frac{1}{arctg\frac{2}{n^2}}$.

<u>Soluție – barem</u>

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(sinx)^2}{x^2} dx = \frac{(sinx)^2}{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2sinxcosx}{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{sin2x}{x} dx$ .... 2 p

$\lim_{x\to 0} \frac{(sinx)^2}{-x} = 0$ și $\lim_{x\to +\infty} \frac{(sinx)^2}{-x} = 0$ 1p

Apoi se face schimbarea de variabilă 2x = t și obținem 1p

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{\frac{t}{2}} \frac{1}{2} dt = \text{că} \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Se face schimbarea de variabilă x/n= t și obținem

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(sin\frac{x}{n})^2}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(sint)^2}{(nt)^2} ndt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{(sint)^2}{t^2} dt = \frac{\pi}{2n}$ 1p

b) Seria este

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{f(n)} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{2}{n^2}.$$

Şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{2}{k^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(arctg(k+1) - arctg(k-1)) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(arctg(n+1) + arctg(n) - arctg1 - arctg0) \to \frac{3\pi^2}{8}.$$

$arctg\,\frac{2}{k^2} = arctg(k+1) - arctg(k-1)$ 3p

Valoarea finală a sumei este $\frac{3\pi^2}{8}$ 2p

2. Fie $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu valorile proprii reale şi distincte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, cu $-1 < \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n.$ Presupunem că suma elementelor de pe fiecare coloană este 1, iar sumele elementelor de pe linii sunt egale.

a) Să se arate că 1 este valoare proprie a matricei A, iar vectorul $(1,1,...,1)^T$ este un vector propriu corespunzător valorii proprii 1.

b) Să se calculeze

$$\lim_{k\to\infty}\left(A^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right).$$

<u>Soluție – barem</u>

a) Demonstrăm că suma elementelor pe fiecare linie este 1.

Fie $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = b,\ j = 1,2,...,n.$

Ştim că $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n.$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = n, \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = nb \Rightarrow b = 1.$ 2p

Calculăm $\det(A - I_n)$. Dacă în $\det(A - I_n)$ se adună toate coloanele la coloana 1 şi se ţine seama de faptul ca suma elementelor pe linie ale matricei A este 1, coloana va avea elementele egale cu 0.

Rezultă că 1 este valoare proprie. Se verifică că $v_1 = (1,1,\ldots,1)^T$ este vector propriu..........2p

b) Presupunem că $\lambda_1 = 1$, celelalte valori proprii vor fi strict mai mici decât 1.

Matricea A are valori proprii distincte, deci este diagonalizabiă, admite o bază formată din vectori proprii.

Fie această bază $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$. Presupunem că v_1 este vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$. Putem scrie

$$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

....2p

$$A^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\alpha_1 A^k v_1+\alpha_2 A^k v_2+\alpha_3 A^k v_3+\ldots+\alpha_n A^k v_n$$

$$=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\lambda_2^k v_2+\alpha_3\lambda_3^k v_3+\ldots+\alpha_n\lambda_n^k v_n,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(A^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\lambda_2^k v_2+\alpha_3\lambda_3^k v_3+\ldots+\alpha_n\lambda_n^k v_n\right)=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

deoarece $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k=0, i=2,3,\ldots,n.$ 1p

Determinăm α_1.

Suma elementelor vectorului $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ este

$y_1+y_2+\ldots+y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$.

Demonstrăm prin inducţie că suma elementelor lui $A^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ este $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

Dar $x_1+x_2+\ldots+x_n=n\alpha_1\Rightarrow\alpha_1=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Deci

$$\lim_{k\to\infty}\left(A^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$ 3p

3. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $0<x_1<1$, dat de recurenţa $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, pentru orice $n\geq 1$.

a) Să se arate că $(n+1)x_n<1$, pentru orice $n\geq 2$.

b) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n{}^{\alpha}$, unde α este un parametru real.

a) Din inegalitatea mediilor avem

$$x_2 = x_1(1-x_1) \le \left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

…………………………………………………………………………………………………1p

Cum functia $f(x) = x(1-x)$ este strict crescatoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, folosind metoda inductiei matematice, deducem ca $x_n < \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \ge 2$………………………………2p

b) Deoarece $(n+1)x_n < 1$, pentru orice $n \ge 2$, deducem ca sirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este strict descrescator, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. …………………………………………………………1p

Vom arata ca seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeasi natura.

Calculam $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Pentru aceasta,

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_n + x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} (1-x_n) = 1.$

Conform teoremei Stolz–Cesàro, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$. …….3p

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ………………………………………………………………1p

Daca $\alpha > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ este convergenta. …………………………………………..1p

Daca $\alpha \le 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ este divergenta. ……………………………………………1p

4. Să se arate că pentru o matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A^2 = A$;

b) $rang\, A + rang\, (I_n - A) = n$.

Soluție – barem

Consideram subspatiile lui $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: $V_1 = \{X | A\cdot X = 0\}$ si $V_2 = \{X | A\cdot X = X\}$. ………..1p

$a) \Rightarrow b)$: Aratam ca $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$, adica orice $X \in \mathbb{C}^n$ se scrie unic sub forma $X = X_1 + X_2$ cu $X_1 \in V_1$, $X_2 \in V_2$. Avem , deci $X_2 = A\cdot X$ si $X_1 = X - A\cdot X$ si evident $X_2 \in V_2$, $X_1 \in V_1$

……………………………………………………..2p

Cum rang A = n - dimV_1 şi rang (I_n-A) = n – dimV_2 rezultă concluzia ……………………….………..2p

$b) \Rightarrow a)$ Avem $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ si $dimV_1 = n - rangA$, $dimV_2 = n - rang(I_n - A)$. Din $b)$ rezulta $\dim V_1 + \dim V_2 = n$ deci $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ …………………………………………………2p

si orice vector $X \in \mathbb{C}^n$ se scrie unic sub forma $X = X_1 + X_2$ cu $X_1 \in V_1, X_2 \in V_2$ adica $A \cdot X_1 = 0$ si $A \cdot X_2 = X_2$. ………………………………………………..1p

Avem: $(A^2 - A)X = A(A \cdot X_1 + A \cdot X_2) - A(X_1 + X_2) = A(0 + X_2) - 0 - X_2 = X_2 - X_2 = 0$, oricare ar fi $X \in \mathbb{C}^n$ si atunci $A^2 - A = 0$. …………………………………………………..2p